TITLE:
Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value (Complex Analysis and Microlocal Analysis)

AUTHOR(S):
山根, 英司

CITATION:
山根, 英司. Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value (Complex Analysis and Microlocal Analysis). 数理解析研究所講究録 1999, 1090: 180-182

ISSUE DATE:
1999-04

URL:
http://hdl.handle.net/2433/62864

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
1090 巻 1999 年 180-182

Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value

山根英司 (Hideshi Yamane)[1]

§1. イントロダクション

次のタイプの非線型特異1階偏微分方程式について調べる：

$$(tD_t - \rho(x))\,u = ta(x) + G_2(x)(t, tD_t u, u, D_1 u, \ldots, D_n u)。 \qquad (1)$$

ここで $(t,x) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $D_t = \partial/\partial t$, $D_i = \partial/\partial x_i$。また, $\rho(x)$ と $a(x)$ は, $\mathbf{C}_x^n$ の原点を中心とする多重円盤 D で定義された正則関数。また, G_2 は

$$G_2(x)(t, z, X_0, X_1, \ldots, X_n) = \sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} a_{pq\alpha}(x) t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n},\ |\alpha| = \alpha_0 + \cdots + \alpha_n,$$

の形の巾級数展開を持つとする。ここで $a_{pq\alpha}(x)$ は D で正則であり,
$\sum_{p+q+|\alpha|\geq 2} \sup_{x\in D} |a_{pq\alpha}(x)| t^p z^q X_0^{\alpha_0} \cdots X_n^{\alpha_n}$ は $(t, z, X_0, \ldots, X_n)$ の収束巾級数とする。

さて局所正則解 $u(t,x)$ であって, 条件 $u(0,x) \equiv 0$ を満たすものを探そう。(1) の左辺はこの条件のおかげで well-defined になる。

次の定理は [1] で証明されている。

定理 1 (Gérard-田原) $\mathring{x} \neq 0$ を D の一つの点とする。もし $\rho(\mathring{x}) \notin \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$ ならば, 方程式 (1) は $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解 $u(t,x)$ を $(0, \mathring{x}) \in \mathbf{C}_t \times \mathbf{C}_x^n$ の近傍でただ一つ持つ。

この定理を踏まえて, $\rho(\mathring{x})$ が正整数値を取る場合に何が起きるかを調べよう。

次の仮定を置く：

$$\rho(0) \in \mathbf{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}, \quad \rho(x) \not\equiv \rho(0)。 \qquad (2)$$

この仮定のもとで, 集合 $V = \{\rho(x) = \rho(0)\} \subset \mathbf{C}_x^n$ は余次元1の解析的集合である。方程式 (1) は V の外で $u(0,x) \equiv 0$ を満たす正則解をただ一つ持つが, V の点の近傍では generic にはそのような解は存在しない。

さて,

$$d(x) = \mathrm{dist}(x, V \cup \partial D) = \mathrm{dist}(x, V)$$

と置こう。ここで $\mathrm{dist}(x, Z)$ は x から $Z \subset \mathbf{C}_x^n$ までの距離を表わすものとする。第2の等号は x が原点に十分近ければ成り立つ。

[1]275 千葉県習志野市芝園2-1-1 千葉工業大学数学教室　yamane@cc.it-chiba.ac.jp
1991 Mathematics Subject Classifications: 35A20

解 $u(t,x)$ は次の形の開集合において正則である：

$$|t| < Cd(x)^p, \quad x \text{ は原点に十分近い。}$$

ここで p と C は正定数である。 p は $\rho(x)$ だけで決まり，他のもの，例えばG_2 などにはよらない。詳しいことは後で述べる。

$\rho(x)-\rho(0)$ が $x=0$ においてちょうど g 位のゼロを持つとすると，次の評価が成り立つ：

$$\left|\frac{1}{\rho(x)-\rho(0)}\right| \leq C'd(x)^{-g}。 \tag{3}$$

ここで C' は正定数。証明は付録で与える。

主定理を述べよう。

定理 2 (主定理)

(i) もし $\rho(0) \geq g+2$ ならば，$u(0,x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t,x)$ は

$$|t| < Cd(x), \quad x \text{ は原点に十分近い，}$$

の形の領域で正則である。

(ii) もし $\rho(0) < g+2$ ならば，$u(0,x) \equiv 0$ を満たす (1) の解 $u(t,x)$ は

$$|t| < Cd(x)^{\frac{g+2}{\rho(0)}}, \quad x \text{ は原点に十分近い，}$$

の形の領域で正則である。

どちらの場合でも C は $\rho(x)$, $a(x)$ と $G_2(t,z,X_0,X_1,\ldots,X_n)$ で定まる正定数である。

証明するには，まず形式解を求めて，その収束を陰関数定理で示す。詳しくは [5], [7] をご覧ください。

参考文献

[1] Gérard R. and Tahara H., Holomorphic and Singular Solutions of Nonlinear Singular First Order Partial Differential Equations, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, **26**(1990), 979-1000.

[2] Gérard R. and Tahara H., *Singular Nonlinear Partial Differential Equations*, Vieweg, 1996.

[3] Hille E., *Ordinary differential equations in the complex domain*, John Wiley and Sons, 1976.

[4] 木村俊房, 常微分方程式II, 岩波書店（岩波講座基礎数学）, 1977 .

[5] Yamane H., Nonlinear singular first order partial differential equations whose characteristic exponent takes a positive integral value, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **33(5)**(1997).

[6] Yamane H., Singularities in Fuchsian Cauchy Problems with holomorphic data, *to appear in Publ. RIMS, Kyoto Univ.*

[7] 山根英司, 特性根が正整数値を取る非線型特異1階偏微分方程式, 数理解析研究所講究録「複素領域の偏微分方程式」